精密化された三角不等式の等号成立条件について

静岡大学・教育学部　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Shizuoka University
新潟大学・自然科学系　斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
Niigata University
岡山県立大学・情報工学部　三谷 健一 (Ken-Ichi Mitani)
Okayama Prefectural University

1　序

X をノルム空間とし, そのノルムは $\|\cdot\|$ で表す. このとき, 三角不等式とは X の 2 個の元 x_1, x_2 に関するノルム不等式 $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ をいうが, ここでは, この一般化である n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に関する以下のノルム不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

を三角不等式と呼ぶことにする. 近年, 以下の問題に関して多くの研究が行われている. (cf. [2, 4, 6, 7, 11, 18])

問題 1.1　ノルム空間 X の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して,

(i) $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + C \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ をみたす正の値 C を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + D$ をみたす正の値 D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

また, その等号成立条件を求めよ.

ここでは (i) のタイプの不等式を**精密化された三角不等式**とよび, (ii) のタイプの不等式を**三角不等式の逆不等式**とよぶことにする.

本報告では, 問題 1.1 に関する近年の発展の流れを紹介することを目的とする. 2 章では簡単のために精密化された三角不等式についてのみ解説をするが, 三角不等式の逆不等式についても同様に研究が進んでいるので, そちらについては参考文献を参照して頂きたい. また, 3 章では精密化された三角不等式の等号成立条件を紹介する.

2　精密化された三角不等式

バナッハ空間の幾何学的な性質の特徴づけに関連をして, 2005 年の加藤-斎藤-田村 [9] に端を発する問題 1.1 に関する一連の研究は, Hudzik-Landes により与えられた以下の不等式がそのモチベーションであった.

定理 2.1 ([5, Lemma 1]) ノルム空間 X の 0 でない 2 個の元 x_1, x_2 に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\|x_1 + x_2\| + \left(2 - \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|\right) \min\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

加藤-斎藤-田村はこの結果を n 個の元の場合へと拡張すると同時に, 逆不等式も与えた.

定理 2.2 ([9, Theorem 1]) ノルム空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1\leq i\leq n} \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

この不等式の成功に誘発されて, その後様々な設定のもとで三角不等式の精密化の研究が進んでいる. (cf. [2, 4, 6, 7, 11, 18]) その 1 つに, 三谷-斎藤- 加藤-田村 [13] があり, 彼らは定理 2.2 の不等式をより精密化することに成功した.

定理 2.3 ([13, Theorem 1]) ノルム空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \sum_{k=2}^n \left(k - \left\|\sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

ここで x_i^* は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ を満たす x_i の並べ替えである.

定理 2.2 および 定理 2.3 は問題 1.1 の 1 つの解を与えているが, 峰野-中村-大和田 [12] は, ノルムにより構成される連続関数を利用して三角不等式の差分 $\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^n x_i\|$ と 0 との間の全ての値を特徴付けることに成功するとともに, その中間値として定理 2.2 および定理 2.3 の不等式が得られることを示した. Dehghan[3] は峰野-中村-大和田 [12] と独立して定理 2.2 および定理 2.3 を含む以下の不等式を示した.

定理 2.4 ([3, Theorem 2.1]) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をノルム空間 X の 0 でない元をとする. このとき, 実数 $p_i \geq 0$ と $q_i > 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が $p_1/q_1 \geq \cdots \geq p_n/q_n$ を満たすなら, 次の不等式が成立する.

$$\left\|\sum_{i=1}^n p_i x_i\right\| + \sum_{k=2}^n \left(\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) \left(\sum_{i=1}^k q_i\|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^k q_i x_i\right\|\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i\|x_i\|$$

ここで $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 0$ である.

その後, 佐野らにより定理 2.4 は峰野-中村-大和田の与えた不等式に含まれている事が [20] で示された．また, これらの不等式の研究はノルム空間における角度の概念と関連する Dunkl-Williams 不等式の研究とも密接に関係している．(cf. [10, 15, 17])

3 精密化された三角不等式の等号成立条件について

精密化された三角不等式の研究に付随して, その等号成立条件の研究も行われてきた．加藤-斎藤-田村は [9] で定理 2.2 の等号成立条件も与えている．また, 定理 2.3 に関しては, 三谷-斎藤が [14] で論じているが, それらは全て空間が狭義凸の場合である．その背景には, 以下にあげる狭義凸ノルム空間における三角不等式の等号成立条件がある．

ノルム空間 X が狭義凸であるとは, $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ の全ての異なる 2 つの元 x_1, x_2 に対して $\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| < 1$ が成立するときをいう．

補題 3.1 (cf. [1, Problem 11.1]) X を狭義凸ノルム空間とする．このとき X の任意の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対して以下の条件は同値である．

(i) $\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|;$

(ii) $\|x_j\|x_i = \|x_j\|x_i \quad (i, j \in \{1, \cdots, n\}).$

定理 2.2 および定理 2.3 は三角不等式を用いて示されていることからも, 補題 3.1 がその等号成立条件を考察する上で有用であることは容易に想像できるであろう．実際にこの補題により, 以下の精密化された三角不等式の等号成立条件が得られている．

定理 3.2 [9, Theorem 2] 狭義凸ノルム空間 X の 0 でない任意の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対して $\|x_{j_0}\| = \min\{\|x_j\| : 1 \le j \le n\}$, $\|x_{j_1}\| = \max\{\|x_j\| : 1 \le j \le n\}$ とおく．このとき

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \le i \le n} \|x_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

が成立することの必要十分条件は, 以下のどちらか一方が成立することである．

(a) $\|x_1\| = \|x_2\| = \cdots = \|x_n\|;$ または

(b) 全ての $j \in \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \|x_{j_0}\| \ne \|x_j\|\}$ に対して $\frac{x_j}{\|x_j\|} = \frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|}$ かつ

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} = \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|}$$

が成立する．

定理 3.3 [14, Theorem 3.7] 狭義凸ノルム空間 X の 0 でない任意の元 $x_1, \ldots, x_n$ が $\|x_1\| > \|x_2\| > \ldots > \|x_n\|$ を満たすとき, 等式

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{i=1}^{n}\left(i - \left\|\sum_{j=1}^{i} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_i\| - \|x_{i+1}\|) = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

が成立することの必要十分条件は, $1 = \alpha_1 > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_n|$ となる実数 α_j $(j \in \{1, \ldots, n\})$ が存在して, $x_j = \alpha_j x_1$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ かつ $\sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} \geq 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ を満たすことである.

これらの結果を含むものとして, 佐野-泉田-三谷-大和田-斎藤は峰野-中村-大和田の精密化された三角不等式の等号成立条件を与えた. (see. [19, Theorem 3.4]) また, 定理 2.4 の等号成立条件については, 以下の結果が得られている.

系 3.4 [20, Corollary 3.3] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を狭義凸ノルム空間 X の 0 でない元とする. このとき, 実数 $p_i \geq 0$ と $q_i > 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ が $p_1/q_1 \geq \cdots \geq p_n/q_n$ を満たすとき, 等式

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right\| + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{j} q_i\|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{j} q_i x_i\right\|\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j\|x_j\|$$

が成立することの必要十分条件は, 実数 α_j $(j \in \{1, \ldots, n\})$ が存在して, $x_j = \alpha_j x_1$ かつ $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j q_j \geq 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ を満たすことである. ここで $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 0$ とする.

4 狭義凸を仮定しない三角不等式の等号成立条件について

我々は一般のノルム空間における精密化された三角不等式の等号成立条件として定理 3.2 および定理 3.3 を含む幾つかの結果を得たが, それらは現在未発表のためここでは狭義凸を仮定しない三角不等式の等号成立条件に関する結果を紹介するに留める.

バナッハ空間 X の共役空間を X^* で表し, $S_{X^*} = \{x \in X^* \mid \|x\| = 1\|\}$ とする. 中本-高橋はバナッハ空間において以下の結果を与えた.

定理 4.1 [16, Theorem 2] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をバナッハ空間 X の 0 でない元とする. このとき, 等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

が成立することの必要十分条件は, S_{X^*} の端点 f が存在して, 全ての $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $f(x_i) = \|x_i\|$ を満たすことである.

彼らは定理 4.1 において, f は S_{X^*} の端点である必要がないことも同時に述べている. (see. [16, Remark 2])

最後に, 一般のノルム空間における三角不等式の等号成立条件に関する最新の結果を紹介する.

定理 4.2 [8, Theorem 2] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をノルム空間 X の 0 でない元とする．このとき，等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

が成立することの必要十分条件は，$\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|};\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$ の凸包が S_X に含まれることである．

参考文献

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis, *Problems in operator theory. Graduate Studies in Mathematics*, 51. AMS, Providence, RI, (2002).

[2] A.H. Ansari and M.S. Moslehian, *More on reverse triangle inequality in inner products spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. (2005), no.18, 2883–2893.

[3] H. Dehghan, *Some new bounds for the generalized triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. **15** (2012), no. 4, 875–881.

[4] S.S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in inner product spaces*, Aust. J. Math. Anal. Appl. **1** no.2 (2004), 1–14.

[5] H. Hudzik and T.R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294**(1992), 117–124.

[6] M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp mean triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. **13** (2010), 743–752.

[7] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **344**(2008), 17–31.

[8] G. Łysik, *On the triangle equality,* Math. Inequal. Appl., **21**(2018), no.2, 511–516.

[9] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle Inequality and its reverse in Banach spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[10] L. Maligranda, *Some remarks on the triangle inequality for norms,* Banach J. Math. Anal., **2** no.2(2008), 31–41.

[11] M.S. Martirosyan and S.V. Samarchyan, *Inversion of the triangle inequality in* $\mathbb{R}^n$, **38**(2003), no.4, 65–72.

[12] K. Mineno, Y. Nakamura and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 15 (2012), no. 4, 1019–1035.

[13] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[14] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces II,* J. Inequal. Appl. (2010), Art. ID 323609, 17 pp.

[15] K.-I. Mitani, N. Tabiraki and T. Ohwada, *Note on Dunkl-Williams inequality with n elements,* Nihonkai Math. J. **27** no.1-2(2016), 125–133.

[16] R. Nakamoto and S.-E. Takahashi, *Norm equality condition in triangular inequality,* Sci. Math. Jpn. **55** no.3(2002), 463–466.

[17] J. Pěcarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 461–470.

[18] S. Saitoh *Generalizations of the triangle inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4**(2003), no. 3, Article 62, 5 pp.

[19] H. Sano, T. Izumida, K.-I. Mitani, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality II*, Cent. Eur. J. Math. **12**(5)(2014), 778–786.

[20] H. Sano, K. Mineno, Y. Hirota, S. Izawa, C. Tamiya and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality III,* J. of Nonlinear and Convex Anal. **17** no. 2(2016), 297–310.